

Wat is wiskunde?

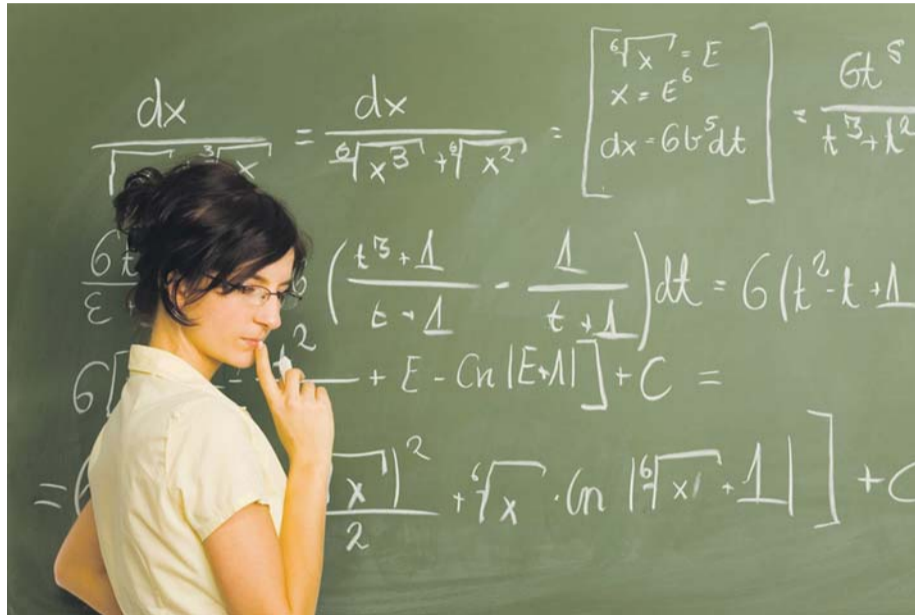
De rol van logica en creativiteit

Logica is niet de kern van wiskunde, het is slechts de taal waarmee wiskundige ideeën worden geïmplementeerd, beschreven en samengevat. De kern van wiskunde is het creatieve idee. **door Ronald Meester**

W

AT

gaat er om in het brein van een wiskundige? Is het een goede vraag om naar het 'hoe' van wiskundig denken te vragen? Waar zijn wiskundigen eigenlijk mee bezig als ze 'onderzoek' doen en wat bepaalt het object van hun studie nu precies? Als je met dit soort vragen zit, dan zijn er op het eerste gezicht veel boeken die je mogelijk kunnen helpen en in dit essay ga ik in op drie recente titels: *The Mind of the Mathematician* (Michael Fitzgerald en Ioan James), *How Mathematicians Think* (William Byers) en *How to Think like a Mathematician* (Kevin Houston). Als je op de titels af zou gaan, dan zou je kunnen denken dat deze boeken allemaal over hetzelfde onderwerp gaan, maar niets is minder waar: ze kunnen bijna niet meer verschillend zijn. Veruit het meest interessante van de drie is het boek van Byers, en het meeste wat ik hier ter sprake zal brengen wordt op de een of andere manier in zijn boek diepgaand besproken. Ik denk overigens dat de titel van zijn boek misleidend is – het zou beter geweest zijn als hij het boek *What Is Mathematics?* genoemd zou hebben, want daar gaat het eigenlijk over.



Niet de logische bewijsvoering is de kern van wiskunde, maar het creatieve idee.

den. De werkelijke kern van de wiskunde is niet de logische bewijsvoering, maar het creatieve idee, en creatieve ideeën zijn nooit een gevolg van deductief redeneren.

De ontwikkeling van de wiskunde door de eeuwen heen laat goed zien dat de grote stappen nooit via een deductief proces gemaakt zijn, maar door het over-

tende manieren te beschouwen is. De crux van het goed bedrijven van wiskunde is dan, aldus Byers, om die beide gezichtspunten te laten bestaan, en op een vruchtbare manier heen en weer te kunnen springen.

Ambigüïteiten spelen op elk niveau een rol. Neem iets eenvoudigs als een deling, bijvoorbeeld $21/5$. Deze schrijfwijze verwijst naar het *proces* van het delen van het ene getal door het andere. Maar evengoed kunnen we stellen dat we het *antwoord* van die deling beschrijven; we kunnen immers $21/5$ simpelweg opvatten als een breuk, een getal dus. Uit mijn eigen vroege kennismaking met rekenen herinner ik mij dit inderdaad als een grandioze ontdekking: $21/5$ is het *antwoord* op het *proces* van het delen van 21 door 5. Het proces opschrijven is het antwoord opschrijven! Heel bijzonder als je de tijd neemt om erover na te denken, en een mooi voorbeeld van ambigüïteit.

Het prachtige van de wiskunde is dat deze ambigüïteiten niet alleen voorko-

THE MIND OF THE MATHEMATICIAN
door Michael Fitzgerald en Ioan James.
The Johns Hopkins University Press.
Baltimore, MD 2007. 196 pag. € 39,50

**HOW MATHEMATICIANS THINK.
USING AMBIGUITY, CONTRADICTION,
AND PARADOX TO CREATE
MATHEMATICS**
door William Byers.
Princeton University Press.
Princeton, NJ 2010. 424 pag. € 24,95

**HOW TO THINK LIKE A
MATHEMATICIAN. A COMPANION TO
UNDERGRADUATE MATHEMATICS**
door Kevin Houston.
Cambridge University Press.
Cambridge 2009. 278 pag. € 27,95

‘Logica is onontbeerlijk voor het goed *bedrijven* van wiskunde, maar het zou een grote misvatting zijn om te denken dat wiskunde logica *is*.’

Het is misschien dus wel een goed idee om met die vraag te beginnen: wat is wiskunde? Als je aan een onderzoeker in de wiskunde de vraag zou stellen wat hij of zij eigenlijk doet, dan is de kans groot dat je als antwoord krijgt: ‘Ik bewijs nieuwe stellingen door strikt logisch te redeneren vanuit axioma’s en/of al eerder bewezen stellingen.’ Dit antwoord wekt stellig de indruk dat wiskunde gedefinieerd wordt door logica, en dat iemand die wiskunde bedrijft vooral bezig is om via deductie van de spreekwoordelijke A naar B te komen. Niets is echter minder waar, zegt Byers, en ik zeg het hem nadrukkelijk na. Logica is onontbeerlijk voor het goed *bedrijven* van wiskunde, maar het zou een grote misvatting zijn om te denken dat wiskunde logica *is*. Logica en precieze bewijsvoering worden vaak de karakteristieke kenmerken van de wiskunde genoemd, maar volgens Byers is logica eigenlijk niets anders dan een taal waarin wiskundige ideeën op een stabiele en overdraagbare manier geïmplementeerd, beschreven en samengevat kunnen wor-

winnen van een crisis. Voor buitenstaanders is het wellicht verwarrend te horen dat er überhaupt een crisis mogelijk is binnen de wiskunde, dus is het misschien goed daar eerst een belangrijk voorbeeld van te geven. De oude Grieken kenden alleen rationale getallen, breuken dus, en de ontdekking dat de schuine zijde van een driehoek met twee rechte zijdes gelijk aan 1 niet als breuk geschreven kon worden, betekende een enorme crisis die pas na heel veel tijd overwonnen werd, nadat de schijnbare tegenstrijdigheid tussen een rationaal getallenstelsel aan de ene kant, en de meetkunde aan de andere kant opgeheven werd.

Het overwinnen van een crisis gaat altijd gepaard met een dieper inzicht waarmee twee verschillende en elkaar uitsluitende gezichtspunten op de een of andere manier toch samengebracht kunnen worden in een nieuw en overstijgend gezichtspunt. Een dergelijke crisissituatie wordt door Byers een *ambigüïteit* genoemd: een enkelvoudige situatie die op twee consistente maar elkaar uitslui-

men, maar dat je zelfs moet opzoeken – waarna het de kunst is om niet te kiezen. De reikwijdte van een wiskundige ingeving wordt bepaald door de mate waarin dit idee elkaar voorheen uitsluitende bevindingen met elkaar in verband weet te brengen op een hoger plan, en het is evident dat logica bij de creatie van zo’n idee geen rol kan spelen. Het logisch

afleiden van een uitspraak uit een andere is niet creatief. We kunnen een computer vertellen hoe hij moet verifiëren of een bepaald bewijs qua logica klopt, maar we kunnen de computer niet instrueren om creatief te zijn. Proponenten van kunstmatige intelligentie beweren dat het verschil tussen een computer en het menselijk brein alleen maar kwantitatief is, maar ik insister dat het verschil kwalitatief is.

Er zijn in het verleden zeker pogingen gedaan om de wiskunde tot louter logica te reduceren. De grote droom (vergelijkbaar met de huidige megalomane droom van sommige (top)fysici van een ‘theorie van alles’) was om de gehele wiskunde op te bouwen vanuit een kleine collectie axioma’s. Op die manier zou ‘waar’ equivalent worden aan ‘bewijsbaar’. Helaas (of eigenlijk moet ik zeggen, gelukkig) is dit een droom gebleken die in de jaren dertig van de vorige eeuw wreed verstoord werd door Kurt Gödel. Gödel liet zien dat er in elke voldoende complexe axiomati-

‘De werkelijke kern van de wiskunde is niet de logische bewijsvoering, maar het creatieve idee, en creatieve ideeën zijn nooit een gevolg van deductief redeneren.’

sche structuur ware uitspraken voorkomen die niet bewijsbaar zijn. Dit leidde tot een grote filosofische crisis in de wiskunde, die overigens vrijwel geen invloed had op het doen en laten van de meeste onderzoekers, die, zoals ze zelf altijd al vertelden, gewoon doorgingen met het bewijzen van stellingen. Vroeger waren alle wiskundigen ook filosofen, maar

tegenwoordig hebben de meeste wiskundigen geen enkele belangstelling meer voor de grondslagen van hun vak. Die grondslagen zijn overigens nog nooit zo onduidelijk geweest als tegenwoordig, en misschien is het fair om te zeggen dat de

ken dat gevoel, het is authentiek en daarmee van belang, maar het zou een vergissing zijn om het daarbij te laten. Vanuit een ander perspectief heeft een wiskundige na een beslissende stap in een bewijs absoluut ook iets gecreëerd.

zijn? Hoe moet ik een definitie lezen? Enzovoort. Het boek staat vol met oneliners, zoals 'Een bewijs is moeilijk te lezen' en 'Een bewijs is een uitleg waarom een bewering waar is'. Houston voegt aan deze laatste bewering toe dat het 'more properly' gaat om een *overtuigende* uitleg waarom iets waar is en dat die uitleg overtuigend moet zijn voor een *wiskundige*. Hierna weet hij nog te melden dat dit helemaal niet zo'n eenvoudig punt is als je denkt, maar dat hij in praktische en niet in filosofische zaken is geïnteresseerd. Ik vraag me af of Houston wel voldoende beseft wat hij hier zegt. Hij heeft het niet over een 'logisch sluitend' bewijs, maar over een 'overtuigend' bewijs. Dat zijn heel verschillende dingen, en ik denk inderdaad dat de meeste wiskundigen niet in staat zouden zijn om hun bewijzen tot een keten van strikt logische gevolgtrekkingen terug te brengen. Maar wat overtuigend is voor mij hoeft dat niet te zijn voor mijn collega, dus zodra

de wereld zeggen dat het waar is, en mijn eigen promotor vertelde mij twintig jaar geleden al eens dat een wiskundige stelling 'langzaam waar wordt'. Toentertijd begreep ik dat niet – ik had juist voor wiskunde gekozen omdat ik dacht dat je in dat vak 'gewoon' kon aantonen dat iets juist was – maar nu denk ik beter te snappen wat hij bedoelde.

Dergelijke overwegingen leiden ook al snel tot bespiegelingen over wat het betekent om een bepaalde wiskundige uitspraak te *begrijpen*. Als ik zeg iets te begrijpen, en mijn collega zegt hetzelfde, begrijpen we de wiskunde dan op dezelfde manier? Grote wiskundigen (Blackwell en Pascal bijvoorbeeld) beweerden altijd alleen maar in begrip geïnteresseerd te zijn, en niet in feitelijke kennis, en zelf heb ik die omslag ook gemaakt. Ik realiseer mij dat er tijdens mijn studietijd veel te veel aandacht was voor het formeel afleiden van stellingen, en veel te weinig voor het echte, essentiële begrip van de dingen. Een bewijs logisch kunnen verifiëren impliceert geenszins dat je het bewijs ook begrijpt, en hieruit is al op te maken dat wiskunde veel meer moet zijn dan alleen maar logica. Veel docenten echter vatten hun taak veel te beperkt op, en denken dat ze door een stelling op het bord te bewijzen, hebben gedaan wat ze horen te doen. Ik bestrijd dat.

Ik heb nog niet gesproken over het boek van Michael Fitzgerald en Ioan James, en daarmee verraad ik misschien al dat ik dat boek minder interessant vind. Fitzgerald en James proberen wiskundig talent te verbinden met andere vaardigheden en kenmerken, zoals muzi-

'Vroeger waren alle wiskundigen ook filosofen, maar tegenwoordig hebben de meeste wiskundigen geen enkele belangstelling meer voor de grondslagen van hun vak.'

moderne gedachte is dat wiskunde helemaal geen fundering nodig heeft.

Byers gaat ook in op de oeroude vraag of wiskundigen creëren of ontdekken. Ook dit is een ambiguïteit waarbij je ervoor moet waken om al te enthousiast een van beide mogelijkheden te kiezen. Beide gezichtspunten zijn namelijk waardevol, en iedereen die een bepaalde mogelijkheid afsluit, verliest daarbij een essentieel aspect van het wiskundig denken. De gedachte dat er ergens absolute waarheden bestaan die door wiskundigen ontdekt worden – een gedachte die we al bij Plato terugvinden, waardoor menig wiskundige zichzelf al snel platonist noemt – is door de recente ontwikkelingen rond de grondslagen van de wiskunde toch wel in diskrediet gebracht. Dat neemt niet weg dat een wiskundige na een creatief inzicht het gevoel kan hebben dat de beslissende stap er altijd al geweest was, en dat hij of zij dat alleen nog maar heeft moeten ontdekken. Ik

We verlaten nu tijdelijk het gedachtegoed van Byers (ik kom er aan het einde van deze beschouwing nog op terug) en vervolgen onze discussie met de andere titels die ik in het begin noemde. Over het boek van Houston kan ik kort zijn: zo filosofisch als Byers is, zo praktisch is Houston. Zijn boek is bedoeld als hulpmiddel

'Er zijn wiskundigen die zonder blikken of blozen beweren dat iets pas waar is als de beste vijf wiskundigen van de wereld zeggen dat het waar is.'

voor wiskundestudenten, en probeert een antwoord te geven op vragen als: wat is het verschil tussen een stelling en een lemma? Hoe kan ik verifiëren of twee gegeven uitdrukkingen aan elkaar gelijk

je een bewijs in deze zin beschrijft, geef je het formalisme in de wiskunde andermaal op. Er zijn wiskundigen die zonder blikken of blozen beweren dat iets pas waar is als de beste vijf wiskundigen van

Zie het als een piepklein daadje van verzet.

12 nummers tegen de vervlakking: 15 euro.

Zie het als een piepklein daadje van verzet. Soms moet een mens opstaan voor een inhoudelijker Nederland. Wat dacht u van twaalf nummers Vrij Nederland voor maar vijftien euro? Elke week opinie, achtergrond, cultuur en alles wat het leven de moeite waard maakt. Geschreven op z'n Vrij Nederlands, dus eigenwijs, tegendraads en vernieuwend. Ga nu naar: www.vn.nl/proefabonnement. Een heldendaadje is zo verricht.

Vrij Nederland
Lang leve de inhoud

kaliteit, engagement, kunst en enkele psychologische aspecten. Vaak overstijgt hun relaas nauwelijks het niveau van wat genoeglijk gebabbel over een wiskundige zus die piano speelt, en een wiskundige zo die ook kunstenaar is. Wanneer de auteurs poneren dat meetkundigen vast visueel denken, en analytici waarschijnlijk meer verbale denkers zijn, dan kan ik mijn tenen niet recht houden. Diepzinniger dan dit worden ze nergens, of het zou moeten zijn bij die passages waarin

ben, hoewel het best aardig is om bij de biografieën van grote wiskundigen iets te lezen over de bijzonderheden van deze grote geesten.

Tot slot van deze beschouwing kom ik terug op het boek en de ideeën van Byers, maar nu in relatie tot kans en toeval, een onderwerp waar ik zelf veel over heb geschreven. Zoals gezegd beschouwt Byers het creatieve idee als de kern van de wiskunde, en is zijn boek een lofzang

tot onbeheersbare dingen, maar is juist tot op zekere hoogte berekenbaar en leidt tot een aantal voorspelbare fenomenen. Je kunt er ook aan rekenen: we kunnen uitrekenen welke inzet je bereid zou zijn te betalen bij een bepaald spel. Ook de prijs van bijvoorbeeld een optie of aandeel wordt met geavanceerde kansrekening bepaald.

Dit is allemaal zo gewoon voor ons, dat we ons nauwelijks meer realiseren dat het aantonen van een verband tussen toeval en determinisme een zeer creatief idee vereiste. In de zeventiende eeuw waren genieën als Pascal, Fermat en onze eigen Huygens nodig om de ambiguïteit (kans versus determinisme) op te lossen door aan te tonen dat deze twee verschijnselen verenigbaar zijn vanuit een ‘hogere’ gezichtspunt. Dat is een vaak voorkomend fenomeen bij een ambiguïteit: vanuit ons huidige perspectief kunnen we ons niet meer voorstellen dat sommige dingen vroeger paradoxaal waren, juist omdat ze voor ons vanzelfsprekend waar lijken te zijn. Ook in dit geval heb ik interne weerstand moeten overwinnen om de relatie tussen toeval en determinisme niet als een vanzelfsprekend verband op te vatten, en die inderdaad als een ambiguïteit te kunnen zien. De visie van Byers vertoont grote gelijkheid met mijn eigen gedachte dat toeval en

determinisme eigenlijk alleen maar ‘ideeën’ zijn, en dat het zeer de moeite loont om tussen deze twee ideeën heen en weer te kunnen springen als dat helpt bij het begrijpen van de wereld om ons heen.

Een van mijn dochters was zichzelf aan het leren om terug te tellen. Ze begon met tien blokjes op tafel en haalde er elke keer eentje weg, tegelijkertijd op de juiste wijze terugtellend. Ik was wel benieuwd wat er zou gebeuren bij het weghalen van het laatste blokje, maar er was geen vuiltje aan de lucht: ‘en dan hebben we nog nul visjes’, concludeerde ze (drie jaar oud) en schreef een keurig rondje op een vel papier. Voor haar was nul gewoon nul, kennelijk zit dat zo in onze cultuur gebakken dat een kind van drie daarmee kan werken. Het is nauwelijks te bevatten dat de grootste geesten op aarde eeuwenlang hebben geworsteld met het begrip nul. Probeer maar eens te rekenen met Romeinse cijfers, en je ervaart hoe lastig het is zonder nul. Een grote crisis, of ambiguïteit – ‘niets kan toch niet iets zijn?’ –, werd uiteindelijk opgelost, en is vandaag de dag een trivialiteit. Zo werkt wiskunde.

Ronald Meester *is als hoogleraar wiskunde verbonden aan de Vrije Universiteit Amsterdam.*

‘Vanuit ons huidige perspectief kunnen we ons niet meer voorstellen dat sommige dingen vroeger paradoxaal waren, juist omdat ze voor ons vanzelfsprekend waar lijken te zijn.’

ze aannemelijk proberen te maken dat vele grote wiskundigen uit het verleden een specifiek autistisch syndroom gehad moeten hebben: het aspergersyndroom. Het zal de meeste mensen wel bekend zijn dat autisme gepaard kan gaan met bepaalde extreme vaardigheden, en er zijn veel voorbeelden van zeer creatieve mensen met een dergelijke stoornis. Erg nieuw is het dus allemaal niet wat Fitzgerald en James hierover te zeggen heb-

ben, hoewel het best aardig is om bij de biografieën van grote wiskundigen iets te lezen over de bijzonderheden van deze grote geesten. Tot slot van deze beschouwing kom ik terug op het boek en de ideeën van Byers, maar nu in relatie tot kans en toeval, een onderwerp waar ik zelf veel over heb geschreven. Zoals gezegd beschouwt Byers het creatieve idee als de kern van de wiskunde, en is zijn boek een lofzang tot onbeheersbare dingen, maar is juist tot op zekere hoogte berekenbaar en leidt tot een aantal voorspelbare fenomenen. Je kunt er ook aan rekenen: we kunnen uitrekenen welke inzet je bereid zou zijn te betalen bij een bepaald spel. Ook de prijs van bijvoorbeeld een optie of aandeel wordt met geavanceerde kansrekening bepaald. Dit is allemaal zo gewoon voor ons, dat we ons nauwelijks meer realiseren dat het aantonen van een verband tussen toeval en determinisme een zeer creatief idee vereiste. In de zeventiende eeuw waren genieën als Pascal, Fermat en onze eigen Huygens nodig om de ambiguïteit (kans versus determinisme) op te lossen door aan te tonen dat deze twee verschijnselen verenigbaar zijn vanuit een ‘hogere’ gezichtspunt. Dat is een vaak voorkomend fenomeen bij een ambiguïteit: vanuit ons huidige perspectief kunnen we ons niet meer voorstellen dat sommige dingen vroeger paradoxaal waren, juist omdat ze voor ons vanzelfsprekend waar lijken te zijn. Ook in dit geval heb ik interne weerstand moeten overwinnen om de relatie tussen toeval en determinisme niet als een vanzelfsprekend verband op te vatten, en die inderdaad als een ambiguïteit te kunnen zien. De visie van Byers vertoont grote gelijkheid met mijn eigen gedachte dat toeval en