

door Ivar Hagendoorn

## De wiskunde van het wereldwijde web

Netwerken als verklaring voor bijna alles

*De Academische Boekengids* 46, september 2004, pp. 5-7.

**Wie op zoek is naar een tip voor een baan of een leuk restaurant, doet er verstandig aan niet zijn vrienden te raadplegen, maar een vage kennis. De kans op het vinden van onbekende informatie is namelijk groter als je buiten je eigen netwerk zoekt. Wiskundige netwerken lijken ten grondslag te liggen aan allerlei systemen: van de voedselketen in de oceaan tot het internet.**

Begin april maakte de Canadese regering bekend dat er dit jaar 350.000 zeehonden afgemaakt mogen worden. Vorig jaar waren dat er 315.000 en het jaar daarvoor 275.000. De zeehondenpopulatie zou volgens de Canadese regering te groot zijn geworden en een bedreiging vormen voor de visstand, met name die van kabeljauw. Deze redenering is niet nieuw.

Midden jaren tachtig daalde de kabeljauwpopulatie in de Noord-Atlantische Oceaan dramatisch. De Canadese regering riep een commissie in het leven om de situatie te bestuderen. De niet geheel verrassende conclusie luidde dat de oorzaak was gelegen in overbevissing en dat bij het uitblijven van drastische maatregelen de visstand nog verder zou dalen. Het Canadese ministerie voor Handel en Visserij verwierp het rapport omdat verlaging van de visquota grote gevolgen zou hebben voor de nationale visserij. Enkele jaren later was de kabeljauwstand in de Noord-Atlantische Oceaan zo ver gedaald dat de Canadese vissers hun quota bij lange na niet haalden en velen van hen alsnog failliet gingen.

Maar de Canadese regering weigerde nog steeds de werkelijkheid onder ogen te zien. Volgens haar lag de schuld nu bij Europese vissers die illegaal in Canadese wateren visten en bij zeehonden die alle vis opaten. Een nieuw wetenschappelijk rapport wees uit dat de zeehondenpopulatie geen invloed had op de kabeljauwstand en dat overbevissing toch echt de werkelijke oorzaak van de daling was. Niettemin besloot de Canadese regering de jacht op de zeehond te openen. Immers, zeehonden eten kabeljauw. In de tweede helft van de jaren negentig werden er aldus honderdduizenden zeehonden gedood. Overigens zonder dat de kabeljauwstand zich herstelde.

Nu eten zeehonden niet alleen kabeljauw maar ook andere vissen, zoals heilbot, haring en zalm. Sommige van deze vissen zijn directe concurrenten van de kabeljauw of eten zelf kabeljauw. Zeehonden, kabeljauw, zalm, meeuwen, garnalen enzovoort vormen samen een complex ecologisch netwerk. Een reductie van het aantal zeehonden werkt dan ook door in grote delen van de voedselketen. Een vermindering van het aantal zeehonden zou er zelfs toe kunnen leiden dat de populatie natuurlijke vijanden van de kabeljauw groeit - in de vorm van andere vissen die ook op het menu van de zeehond staan. Hierdoor zou de kabeljauwstand nog verder kunnen afnemen.

HET BELANGRIJKSTE EUVEL VAN DE NETWERKTHEORIE IS DAT WIE EENMAAL EEN NETWERK GEZIEN HEEFT, OVERAL NETWERKEN ZIET.

Bovenstaand voorbeeld is ontleend aan *Nexus. Small Worlds and the Groundbreaking Science of Networks* van de Britse wetenschapsjournalist Mark Buchanan. In dit boek is tevens een illustratie opgenomen van de voedselketen in de Noord-Atlantische Oceaan zoals die door ecologen in kaart is gebracht. Wie het grote aantal lijnen in dit netwerk ziet, begrijpt dat het niet mogelijk is om een eenvoudig oorzakelijk verband te leggen tussen het aantal zeehonden en de kabeljauwstand.

*Nexus* is één van de vier populair-wetenschappelijke boeken die in de afgelopen anderhalf jaar over de structuur van netwerken zijn verschenen. Verder zijn dat *Linked* van Albert-László Barabási, *Sync* van Steven Strogatz en *Six Degrees* van Duncan Watts. De laatste drie auteurs zijn allen wetenschappers die aan de wieg stonden van dit nog slechts enkele jaren oude vakgebied.

Vier boeken over hetzelfde onderwerp in relatief korte tijd suggereert een hype. Dit beeld wordt versterkt door ondertitels die spreken van 'groundbreaking science', 'new science' en 'the science of a connected age'. Is de netwerktheorie wat de complexiteitstheorie was in de jaren negentig en de chaostheorie in de jaren tachtig? Van alle vier boeken zijn recent paperbackuitgaven verschenen; een geschikt moment om een tussenbalans op te maken. Daarvoor is het goed eerst een stap terug te gaan in de tijd.

Neem een grote zak met knopen, strooi ze uit over de vloer, pak twee willekeurige knopen en naai ze met een lang stuk draad aan elkaar. Leg beide knopen terug, pak opnieuw twee willekeurige knopen en maak ook deze met een draad aan elkaar vast. Het geeft niet als een knoop al met een andere verbonden is en zelfs niet als beide knopen al met elkaar verbonden zijn. Het resultaat is wat in de wiskunde een *random graaf* wordt genoemd. Wat zou er gebeuren als je, na dit proces tien, twintig, dertig keer herhaald te

hebben, één willekeurige knoop van de vloer oppakt? Heb je een losse knoop in je handen of een grote kluwen?

De wiskundigen Paul Erdős en Alfred Rényi ontdekten eind jaren vijftig dat als het aantal verbindingen klein is ten opzichte van het aantal knopen, het netwerk waarschijnlijk uit wat losse knopen en diverse kleine clusters bestaat. Dit klinkt aannemelijk als je bijvoorbeeld honderd knopen hebt en er vier of vijf keer twee met elkaar verbonden zijn. Naarmate het aantal verbindingen groeit, neemt de grootte van de clusters niet alleen toe doordat er een enkele knoop bijkomt, maar ook doordat er zo nu en dan een reeds bestaand cluster aan vastgeknoopt wordt. Ook dit klinkt aannemelijk. Als echter het aantal verbindingen groter wordt dan de helft van het aantal knopen, treedt plotseling een zogenaamde faseovergang op. Vanaf dit punt ontstaat een groot cluster waarin alle knopen direct of indirect met elkaar verbonden zijn. In het geval van honderd knopen dus als er minimaal vijftig keer twee willekeurige knopen met elkaar verbonden zijn.

Op het eerste gezicht lijkt het waarschijnlijk dat het internet, met zijn miljoenen sites, ook een *random* netwerk vormt. Immers, er is geen centrale architect die de links van de ene naar de andere pagina toevoegt. Bovendien doet de één onderzoek naar de structuur van netwerken en is de ander verslingerd aan bridge, een fan van de Rolling Stones of een fanatiek diepzeeduiker. Het is daarom te verwachten dat de links die mensen en bedrijven op hun websites plaatsen een afspiegeling vormen van deze diversiteit aan hobby's, interesses en bezigheden. Groot was dan ook de verbazing van de onderzoeksgroep van Barabási aan de University of Notre Dame (VS) toen inventarisatie van een gedeelte van het internet, eind 1998, een heel ander beeld liet zien. In plaats van zelf op elke link te klikken en de bezochte sites te noteren, schreven de onderzoekers een programmaatje, een zogenaamde *web crawler*, dat het internet afstruinde door via links van de ene pagina naar de andere te springen. De adressen werden teruggestuurd naar een centrale computer. Op basis hiervan konden de onderzoekers een kaart maken van een gedeelte van het internet. Wat bleek? Naar verreweg de meeste sites werd slechts door een stuk of wat andere sites verwezen. Een paar sites bleken echter goed voor een uitzonderlijk groot aantal verwijzingen.

Een tweede verrassing kwam toen de onderzoekers de resultaten uitzetten in een grafiek. Wat zij zagen was een zogenaamde *power law*, of machtswet. Machtswetten duiken op allerlei plaatsen op, bijvoorbeeld in de relatieve frequentie van het aantal verschillende woorden in een tekst en in de frequentie en grootte van aardbevingen en zware stormen. Machtswetten duiden in de meeste gevallen op een onderliggend ordenend principe, een wetmatigheid die ervoor zorgt dat als het aantal knopen verdubbelt, een ander aspect, bijvoorbeeld het aantal onderlinge verbindingen, met telkens dezelfde factor afneemt. Er is derhalve een patroon, iets wat in *random* netwerken ontbreekt.

In het geval van een machtswet zijn - anders dan bij een normale verdeling - de waarnemingen, knopen of wat dan ook, niet gecentreerd rond een gemiddelde. Een *power law* of machtswetverdeling heeft daarom geen 'karakteristieke schaal'. Er is geen gemiddelde, typische waarneming, geen knooppunt of website die model kan staan voor de meeste andere. Om deze reden gaf Barabási netwerken die door een machtswet beschreven worden de naam *scale-free*, of schaal invariante netwerken. De vraag die hij zich vervolgens stelde, was hoe een *scale-free* netwerk ontstaat.

Laten we teruggaan naar de zak met knopen. In plaats van de knopen over de grond uit te strooien en er telkens twee met elkaar te verbinden, zouden we ze ook in de zak kunnen laten zitten en er telkens één uitpakken om deze aan één of meer andere knopen vast te maken. Bij elke nieuwe knoop die we uit de zak halen, moeten we kiezen aan welke van de reeds bestaande knopen we deze nieuwe verbinden. Barabási en zijn PhD studente Réka Albert bedachten hiervoor de volgende regel. Een nieuwe knoop wordt telkens met twee bestaande knopen verbonden, waarbij de kans dat de nieuwe aan een bepaalde knoop vastgemaakt wordt evenredig is met het aantal knopen waarmee deze reeds verbonden is. Dit klinkt misschien wat ingewikkeld, maar het komt erop neer dat de kans dat een knoop wordt vastgemaakt aan eentje die al met twintig andere verbonden is, twintig keer zo groot is als de kans dat deze aan een knoop met slechts één verbinding vastgemaakt wordt. Deze simpele regel voor de groei van een netwerk resulteert in een *scale-free* netwerk.

Hoewel het model aldus antwoord gaf op de vraag hoe *scale-free* netwerken zoals het internet ontstaan, riep het ook een aantal nieuwe vragen op. In het oorspronkelijke model van Barabási en Albert worden de rijken rijker en is er geen plaats voor 'nouveaux riches', sites die in zeer korte tijd een belangrijke plaats verwerven binnen een netwerk. Bovendien zijn er op het internet sites met veel inkomende en weinig uitgaande links, zoals amazon.com, naast sites met zowel veel inkomende als uitgaande links, zoals Google en Yahoo; en natuurlijk zijn er ook sites met helemaal weinig links. Het model van Barabási en Albert was daarom slechts een eerste stap. Sinds de publicatie ervan, in 1999, hebben talloze anderen het uitgebreid en verfijnd.

#### IS DE NETWERKTHEORIE WAT DE COMPLEXITEITSTHEORIE WAS IN DE JAREN NEGENTIG EN DE CHAOSTHEORIE IN DE JAREN TACHTIG?

Terwijl de onderzoeksgroep van Barabási de structuur van het internet analyseerde en de bevindingen toepaste op de stofwisseling in een cel, deden op hetzelfde moment ergens aan de Oostkust van de Verenigde Staten twee wiskundigen een interessante ontdekking.

Eind jaren zestig voerde de Amerikaanse socioloog Stanley Milgram een inmiddels klassiek experiment uit. Hij zond een aantal willekeurige mensen in Nebraska en Kansas een brief met het verzoek deze door te sturen aan een effectenmakelaar in Boston, echter zonder diens adres te vermelden. Wie de effectenmakelaar persoonlijk kende, kon de brief rechtstreeks doorsturen. De overige proefpersonen werd gevraagd de brief door te sturen aan een kennis die de bewuste effectenmakelaar mogelijk kende. Er is inmiddels veel te doen geweest over dit experiment. Zo zouden er veel minder brieven bij de 'geadresseerde' zijn gearriveerd dan aanvankelijk beweerd werd. Feit blijft dat een aantal brieven zijn doel bereikte en dat op zich is al opmerkelijk genoeg.

Wellicht nog opmerkelijker was dat het gemiddelde aantal tussenpersonen rond de zes lag. Een mythe was geboren. De term 'six degrees of separation' werd overigens pas populair na de verfilming van een toneelstuk met dezelfde titel, dat in 1991 op Broadway in première was gegaan. Zo legde een paar jaar geleden de Duitse krant *Die Zeit* een link tussen de eigenaar van een Turkse kebabzaak in Frankfurt en diens favoriete acteur, Marlon Brando. En ten tijde van het Monica Lewinsky schandaal verscheen in *The New York Times* van 21 februari 1998 het hilarische artikel 'Six degrees of Monica', waarvan de inhoud zich laat raden.

In datzelfde jaar 1998 besloten de wiskundigen Steven Strogatz en Duncan Watts, beiden verbonden aan Cornell University, op zoek te gaan naar een verklaring voor dit opmerkelijke fenomeen. In plaats van met een *random* graaf begonnen zij met een perfect geordende graaf, in de vorm van een cirkel, waarin iedere knoop in verbinding staat met vier naaste burens. Dit is gemakkelijk zelf na te doen door lijnen te trekken op een uurwerk. Vervolgens voegden Strogatz en Watts een aantal willekeurige verbindingen toe. Als we bij een uurwerk blijven, bijvoorbeeld van de 7 naar de 1 en van de 4 naar de 9. Voor de geordende graaf geldt hoe meer knopen, hoe groter het aantal tussenstappen dat nodig is om aan de tegenoverliggende kant te komen. Uit de computersimulaties van Strogatz en Watts bleek echter dat een paar willekeurige verbindingen het gemiddelde aantal tussenstappen drastisch deed dalen. Een wiskundige basis voor het *small world* effect, het gegeven dat de afstand tussen twee willekeurige knopen in een netwerk relatief klein is ten opzichte van de grootte van dat netwerk, was daarmee gevonden.

Anders dan bij een *random* graaf resulteert het model van Strogatz en Watts in een hoge graad van *clustering*, gedefinieerd als het aantal werkelijke verbindingen gedeeld door het aantal mogelijke verbindingen. Dit is een eigenschap van veel netwerken. De term 'vriendenkring' is in dit opzicht veelzeggend: de meeste vrienden van een willekeurige persoon zijn veelal ook onderling bevriend of kennen elkaar. Maar in de wereld van de *random* grafen is de kans dat twee personen uit iemands vriendenkring met elkaar bevriend zijn net zo groot als de kans dat dit het geval is met twee willekeurige personen.

De eerdergenoemde Paul Erdős is ongetwijfeld een van de meest productieve wiskundigen van de vorige eeuw. Erdős schreef in totaal zo'n vijftienhonderd artikelen met ongeveer vijfhonderd coauteurs, een unicum in de wiskunde. Als zodanig vormt hij het centrum van een wiskundig universum, waarbinnen het 'Erdős-getal' een maat is voor afstand. Wie een artikel met Erdős geschreven heeft, krijgt Erdős-getal 1. Wie een artikel geschreven heeft met iemand met Erdős-getal 1, krijgt zelf Erdős-getal 2 enzovoort.

In 1997 schreven twee studenten van de University of Virginia voor de grap een computerprogramma waarmee 'The Six Degrees of Kevin Bacon' bepaald kon worden. Het programma zocht in de internetfilmdatabank (<http://www.imdb.com>) naar wie met wie samen in een film gespeeld had en bepaalde zo van iedere acteur zijn of haar afstand tot Kevin Bacon. De website (<http://oracleofbacon.org>) schijnt nog altijd goed te zijn voor een paar duizend bezoekers per dag.

De onderzoeksgroep van Barabási besloot het iets wetenschappelijker aan te pakken, en de clustering coëfficiënt te bepalen voor de wiskundigen die tussen 1991 en 1998 een artikel gepubliceerd hadden. Zij vonden een coëfficiënt die een factor 10.000 groter was dan wanneer wiskundigen hun coauteurs bij toeval zouden kiezen. Min of meer tegelijkertijd deed de natuurkundige Mark Newman, verbonden aan het Santa Fe Instituut (een interdisciplinair centrum voor onderzoek naar complexe systemen), onderzoek naar samenwerkingsverbanden tussen wetenschappers in diverse disciplines. Het meeste onderzoek wordt uitgevoerd door een onderzoeksgroep; wetenschappelijke artikelen hebben dan ook vaak verscheidene auteurs. Niet geheel onverwacht bleken zowel natuurkundigen, medici als informatici typische voorbeelden van een *small world*.

Het empirisch onderzoek van Barabási, Newman en anderen toont aan dat *clustering* en *small world* effecten veel voorkomen in sociale en andere netwerken. De wiskundige modellen van Barabási, Watts en Strogatz laten zien dat het hier om een kenmerk van *alle* netwerken van een bepaalde klasse gaat. Dit verklaart bijvoorbeeld waarom de raden van commissarissen van grote beursgenoteerde ondernemingen – of het nu in Nederland, Duitsland of de Verenigde Staten is – een *old boys* netwerk vormen. Het verklaart ook waarom bijvoorbeeld de Nederlandse dans-, theater- en beeldende kunstwereld, met al hun subsidiecommissies, jury's en stichtingbesturen, elk door een klein clubje mensen geregeerd wordt. En waarom ook in andere verbanden telkens dezelfde namen opduiken. Wie eenmaal in het circuit is opgenomen, wordt ook voor andere posities gevraagd. Volgens de netwerktheorie is dit weinig opzienbarend: de rijken worden rijker. Waarmee overigens niet gezegd is dat dit ook wenselijk is. Aan de hand van de modellen van Watts en Strogatz is het mogelijk om te berekenen hoe klein bepaalde

werelden zijn en hoe eng vertakt een netwerk is. Op basis daarvan zou een toezichthouder voorstellen kunnen doen voor een verbreding van het draagvlak. De commissie Tabaksblad, die vorig jaar een gedragscode heeft opgesteld voor goed ondernemingsbestuur, beperkt bijvoorbeeld het aantal commissariaten bij Nederlandse beursgenoteerde ondernemingen tot vier per persoon.

De ontdekkingen van Barabási, Strogatz en Watts zijn verbluffend simpel. Als lezer vraag je je regelmatig af waarom je daar zelf niet op bent gekomen. Of anders wel waarom het tot het eind van de jaren negentig duurde voordat er überhaupt iemand opkwam. Het belangrijkste euvel van de netwerktheorie is dat wie eenmaal een netwerk gezien heeft, overal netwerken ziet. Toch zijn de modellen en inzichten uit deze theorie geen vervanging, maar een aanvulling op bestaande modellen van bijvoorbeeld het ontstaan van epidemieën en de chemische reacties in een cel. Het belang van de netwerktheorie zit hem erin dat er nu oog is voor het feit *dat* netwerken een structuur hebben, die bovendien wiskundig beschreven kan worden. In veel simulaties, bijvoorbeeld in de biologie en in de epidemiologie, werd voorheen gebruikgemaakt van *random* grafen. Dit blijkt echter in veel gevallen geen goede afspiegeling te zijn van de werkelijke structuur en leidt daarom tot onjuiste resultaten en voorspellingen.

DE TERM "SIX DEGREES OF SEPARATION" WERD PAS POPULAIR NA DE VERFILMING VAN EEN TONEELSTUK MET DEZELFDE TITEL. ZO LEGDE EEN PAAR JAAR GELEDEN DE DUITSE KRANT *DIE ZEIT* EEN LINK TUSSEN DE EIGENAAR VAN EEN TURKSE KEBABZAAK IN FRANKFURT EN DIENS FAVORIETE ACTEUR, MARLON BRANDO.

Van de genoemde boeken ontlopen *Linked*, *Nexus* en *Six Degrees* elkaar niet veel. Alledrie behandelen ze veel dezelfde voorbeelden. *Nexus* is iets populairder geschreven en waaiert soms wel heel erg ver uit. Je kunt in de fractale structuur van rivierdelta's en sneeuwvlokken een netwerk zien, maar dit voegt weinig toe aan wat reeds bekend is uit de chaostheorie. Barabási en Watts leggen ieder de nadruk op hun eigen onderzoek: *scale-free* netwerken in het geval van Barabási, *small world* netwerken in het geval van Watts. Beide auteurs zijn op hun best zolang zij zich bij hun feitelijke onderzoek houden. Geen econoom zal opkijken van wat Barabási over marketing en de 'netwerkeconomie' te zeggen heeft.

*Sync* van Steven Strogatz heeft een andere invalshoek. Strogatz deed oorspronkelijk onderzoek naar synchroniciteit in dynamische systemen. Christiaan Huygens ontdekte drie eeuwen geleden dat twee naast elkaar geplaatste penduleklokken na verloop van tijd synchroon gaan tikken. Dit fenomeen, waarbij twee of meer afzonderlijke componenten op elkaar afgestemd worden zonder dat er een centrale architect aan te pas komt, duikt op allerlei plaatsen op, van het aan en uit 'knippen' van grote wolken vuurvliegjes op Nieuw-Guinea tot de simultane samentrekking van de hartspiieren. In alle gevallen blijkt de interactie tussen de individuele elementen in een netwerk cruciaal. De auteur heeft vele jaren onderzoek gedaan naar het onderwerp dat *Sync* behandelt. Misschien komt het daardoor dat het een meer afgeronde indruk maakt dan *Linked*, *Nexus* en *Six Degrees*. In die boeken is de hete adem van de uitgever soms duidelijk voelbaar.

Vorig jaar zomer kregen netwerktheoretici de kans zichzelf in de praktijk te bewijzen. De black-out aan de Oostkust van de Verenigde Staten en Canada, en de stroomuitval die enkele weken later Italië lamlegde, vestigden de aandacht op de kwetsbaarheid van netwerken. In een opiniestuk in *The New York Times* kwam Barabási echter niet veel verder dan nogmaals te herhalen dat netwerken inderdaad kwetsbaar zijn. Aangezien de elektriciteit niet in een netwerk kan worden opgeslagen, moet zij worden omgeleid als ergens een centrale buiten werking raakt. Dit gaat meestal goed, maar soms treedt er een kettingreactie op als een tweede, een derde - enzovoort - centrale de overspanning niet aankan en eveneens uitvalt. Barabási pleitte derhalve voor meer capaciteit op zowel de centrales als de tussenliggende verbindingen.

Nee, schreef Steven Strogatz een aantal dagen later, eveneens in *The New York Times*. In plaats van termen als 'kettingreactie' en 'domino-effect' zouden we naar de biologie moeten kijken, in het bijzonder naar de werking van het immuunsysteem. Strogatz omschrijft de black-out als het gevolg van een anafylactische shock: een overreactie van het immuunsysteem die soms optreedt bij mensen die door een bij of een wesp gestoken worden. Iedere elektriciteitscentrale deed wat zij moest doen: zichzelf uitschakelen om beschadiging door overspanning te voorkomen. Dit had echter als uiteindelijk gevolg dat het gehele systeem uitviel. Om dit te voorkomen, zouden de individuele centrales met elkaar moeten kunnen communiceren om zo als *systeem* tot een antwoord te komen op de uitval van één of meer knooppunten in het netwerk. De technologie hiervoor bestaat reeds enkele jaren in de vorm van een via optische kabels verbonden computernetwerk, waarmee de centrales aan elkaar gekoppeld zouden kunnen worden. Een dergelijk schaduwnetwerk zou continu het gehele systeem kunnen overzien en in geval van uitval van één of meer knooppunten het voor het netwerk als geheel beste antwoord kunnen bepalen door alle mogelijke scenario's te simuleren. Ook al zou het aanleggen van een glasvezelnetwerk miljarden aan investeringen vergen, de kosten zijn altijd lager dan het uitbreiden van de capaciteit van het gehele netwerk, wat het probleem ook niet werkelijk zou ondervangen. De analyse van Strogatz is interessant, omdat het daadwerkelijk nieuwe inzichten bevat en op basis daarvan concrete voorstellen doet. Het door Strogatz geschreven *Sync* vormt hiervan een goede afspiegeling.

Tot besluit een hele praktische toepassing van de netwerktheorie. Eind jaren zestig deed de socioloog Mark Granovetter, destijds verbonden aan Harvard University, onderzoek naar hoe mensen 'netwerken'.

Dat wil zeggen: hoe zij hun connecties gebruiken om een nieuwe baan te vinden. Na te zijn afgewezen voor publicatie in de *American Sociological Review* legde Granovetter zijn resultaten teleurgesteld terzijde. Een paar jaar later werd het artikel toch in een ander tijdschrift gepubliceerd. Inmiddels geldt het als een van de klassiekers binnen de sociologie. Wat Granovetter ontdekte, was dat vage kennissen veel belangrijker zijn dan goede vrienden bij het vinden van een nieuwe baan. De vage kennissen vormen de willekeurige verbindingen tussen de clusters die Watts en Strogatz jaren later in hun *small world* model zouden toevoegen. Een vage kennis is een brug tussen twee werelden. Dus wie op zoek is naar een tip voor een baan, een goed boek of een leuk restaurant, doet er verstandig aan niet zijn vrienden te raadplegen, die immers hoogstwaarschijnlijk over dezelfde informatie beschikken, maar die vage kennis die twee keer per jaar een e-mail stuurt.

**Ivar Hagendoorn** is freelance choreograaf en onderzoeker. Hij doet onderzoek naar de cognitieve en wiskundige grondslagen van dans en choreografie.

### **Besproken boeken:**

*Linked. The new science of networks*  
door **Albert-László Barabási**.  
Plume. New York 2003.  
294 pag. Pbk., € 12,95

*Nexus. Small worlds and the groundbreaking science of networks*  
door **Mark Buchanan**.  
W.W. Norton & Company. New York 2003.  
238 pag. Pbk., € 13,95

*Six Degrees. The science of a connected age*  
door **Duncan J. Watts**.  
W.W. Norton & Company. New York 2004.  
368 pag. Pbk., € 21,95

*Sync. The emerging science of spontaneous order*  
door **Steven Strogatz**.  
Hyperion. New York 2004.  
352 pag. Pbk. Penguin editie, € 17,80

### **Literatuur:**

Op de homepage van de vakgroep van Albert-László Barabási, <http://www.nd.edu/~networks>, staan alle artikelen van zijn onderzoeksgroep. Die zijn ook te vinden op <http://arXiv.org/archive/cond-mat>, naast vele recente preprints en vrijwel alle inmiddels klassieke artikelen van o.a. Steven Strogatz, Duncan Watts en Mark Newman. Een goede inleiding in de wiskunde van grafen is *Graph Theory in Practice* deel I en II van Brian Hayes, verschenen in *American Scientist* van januari/februari resp. maart/april 2000 en te vinden in de 'archives' op <http://www.americanscientist.org>.