Teun Koetsier

Het oneindige verhaal

Op zoek naar het verdwijnpunt in wiskunde en leven

***De Academische Boekengids* 50, mei 2005, pp. 22-23.**

Speuren naar het oneindige kan tot waanzin leiden, maar is voor veel wiskundigen ook een noodzakelijk plezier. De schrijver David Foster Wallace en de wetenschappers Robert en Ellen Kaplan wijden twee zeer verschillende boeken aan dit fenomeen.

Er is een grap over een kapitein die aan dek komt en tegen een matroos zegt: 'Jansen, haal jij dat lijntje even binnen!' Jansen begint vervolgens de lijn uit het water te trekken. Wanneer de kapitein een uur later terugkomt, is Jansen nog niet klaar. 'Ben je nou nog bezig?', vraagt de kapitein. 'Ja kapitein', zegt Jansen. 'Ik denk dat ze het eind eraf hebben gesneden.'

Ik weet niet waar dit verhaal vandaan komt, maar het doet denken aan Griekse sofismen als: 'Wat je niet hebt verloren, dat heb je. Hoorns heb je niet verloren, dus heb je die en ben je dus een hoorndrager.' Studenten weten tegenwoordig niet wat een hoorndrager is. Maar als je ze uitlegt dat er vroeger een bedrogen echtgenoot mee werd aangeduid, dan kunnen ze zich meestal wel voorstellen dat de oude Grieken, toen die bezig waren de logica uit te vinden, dit soort redeneringen amusant vonden.

Matroos Jansen redeneerde zo: 'Dat wat je ergens afsnijdt, zit er niet meer aan. Dus als je het eind van een touw afsnijdt, is het een touw zonder eind geworden, een oneindig touw. Aan zo'n touw blijf je trekken.' Als je in logica geïnteresseerd bent, zijn zulke redeneringen, die geldig lijken maar dat niet zijn, leerzaam.

Er is nog een tweede reden waarom de Grieken het verhaal van Jansen vast aardig hadden gevonden. Zij ontdekten namelijk ook de problematiek van het oneindige in de wiskunde. Kan men zich op enigerlei wijze een oneindig lang touw voorstellen? Of is de notie 'oneindig lange lijn' een contradictio in terminis? Aristoteles koos voor de laatste mogelijkheid; hij vond de notie van het zogeheten actueel oneindige absurd en verwierp deze als logisch onmogelijk.

De laatste jaren verschijnen er veel goede populair-wetenschappelijke boeken over wiskunde. Dat is een goede zaak, want het beoefenen van wiskunde en logica kan een bijzondere intellectuele bevrediging geven. *The Art of the Infinite* van Robert en Ellen Kaplan en *Everything and More. A Compact History of* ∞ van David Foster Wallace vallen in deze categorie. (De omgevallen 8 in de titel is het wiskundige symbool voor het oneindige.) Beide boeken gaan over het oneindige. Ze zijn goed geschreven, maar het werk van de Kaplans is traditioneler dan dat van Wallace. De Kaplans schotelen de lezer op een zeer begrijpelijke wijze een groot aantal mooie stukjes wiskunde voor die op de een of andere manier een relatie hebben met het oneindige. Zo behandelen ze het principe van de volledige inductie. Dit stelt de wiskundige in staat te bewijzen dat iets voor alle natuurlijke getallen geldt. Verder schrijven ze over oneindige sommen, die in de wiskunde reeksen worden genoemd. De bijzondere getallen e en π kunnen bijvoorbeeld als reeksen worden geschreven. Ook de meetkunde passeert de revue. Zo heeft de in de Italiaanse Renaissance ontdekte theorie van het perspectief met het oneindige te maken; het verdwijnpunt van het geschilderde tafereel correspondeert immers met het 'oneindig ver weg gelegen' snijpunt van alle lijnen die loodrecht op de afbeelding staan.

In deze context laat zich ook de door de Fransman Jean-Victor Poncelet ontwikkelde 'projectieve meetkunde' aan de orde stellen. Daarin wordt het ouderwetse meetkundige vlak uitgebreid met een oneindig verre rechte. Poncelet deed zijn werk in Russische gevangenschap, nadat het napoleontische leger hem voor dood had achtergelaten op het slagveld. De Kaplans dissen dergelijke anekdotes met smaak op. Hoewel op hun boek eigenlijk niets is aan te merken, gaat pas bij dat van Wallace mijn hart sneller kloppen. Als een bekende romanschrijver ineens publiceert over de geschiedenis van een verre van triviaal onderdeel van de wiskunde, dan is dat opmerkelijk. Bovendien gaat Wallace meer de diepte in dan de Kaplans.

De 42-jarige David Foster Wallace wordt wel de belangrijkste Amerikaanse schrijver van zijn generatie genoemd. Zijn opus magnum is *Infinite Jest* uit 1997: een in Boston spelende complexe roman van meer dan duizend bladzijden en met honderden voetnoten. Het leverde hem in sommige beschouwingen de status van *cult author* op. In 2003 verscheen van zijn hand *Everything and More*, een compacte geschiedenis van het oneindige in de wiskunde. Wallace is van mening dat een goed verhaal en een mooi wiskundig bewijs niet wezenlijk van elkaar verschillen. Dat is een sympathiek standpunt. Immers: het idee dat wiskunde altijd moeilijk is en verhalen altijd lichte kost zijn, klopt niet. Er zijn delen van de wiskunde die als eenvoudig betiteld kunnen worden en een goed verhaal kan erg ingewikkeld zijn. Wiskunde en literatuur hebben meer met elkaar te maken dan men pleegt te denken.

> 'DE IN DE ITALIAANSE RENAISSANCE ONTDEKTE THEORIE VAN HET PERSPECTIEF HEEFT MET HET ONEINDIGE TE MAKEN; HET VERDWIJNPUNT VAN HET

GESCHILDERDE TAFEREEL CORRESPONDEERT IMMERS MET HET “ONEINDIG VER WEG GELEGEN” SNIJPUNT VAN ALLE LIJNEN DIE LOODRECHT OP DE AFBEELDING STAAN.’

De wiskunde wordt wel gedefinieerd als de wetenschap van het oneindige, die dat oneindige met eindige middelen tracht te begrijpen. Vanuit dit idee vertelt Wallace het verhaal van de verovering van het oneindige. Zo’n mix van geschiedenis en filosofie van een toch heel technisch vak als wiskunde kan niet anders dan controversieel zijn. Er is hier en daar wiskundig of historisch misschien wel wat op het boek aan te merken, maar Wallace kan schrijven, en hij weet waar hij het over heeft. Je zou bijna zeggen dat er een wiskundige aan hem verloren is gegaan. Het is alleszins te hopen dat zijn fans hem zullen volgen en zich na *Infinite Jest* op *Everything and More* zullen storten. Het is werkelijk een boek dat ook anderen in je omgeving moeten lezen en waarover je met elkaar moet discussiëren.

Het verhaal is er spannend genoeg voor: de verovering van het oneindige begint bij de Grieken en bereikt in de negentiende eeuw een hoogtepunt met het werk van twee Duitse geleerden, Richard Dedekind en Georg Cantor. Het wordt duidelijk dat het onderzoek fascinerende resultaten heeft opgeleverd. Bovendien is het verweven met lastige filosofische kwesties. In de wiskundige theorie van de natuurlijke getallen geldt bijvoorbeeld dat 2 + 1 = 3. Maar als je 2 konijnen in een doos doet en vervolgens nog 1, dan is het niet uitgesloten dat je na verloop van tijd een doos met 10 konijnen hebt. Dat komt dan doordat die konijnen zich hebben vermenigvuldigd. Dat is op zich een groot wonder, maar als een wiskundige 2 + 1 = 3 zegt, dan sluit hij die mogelijkheid uit. Van alles wat tot een ander antwoord zou kunnen leiden, wordt op dat moment geabstraheerd. ‘Abstraheren’ en ‘idealiseren’ zijn de toverwoorden in de wiskunde. De natuurlijke getallen zijn ideale eenheden die zich niet vermenigvuldigen of zomaar verdwijnen. Die ideale eenheden gedragen zich netjes, en dan is 2 + 1 altijd 3.

Een gevolg van dat abstraheren en idealiseren is dat wiskundigen genoodzaakt zijn zich met het oneindige bezig te houden. In de theorie van de natuurlijke getallen is er bijvoorbeeld geen grootste getal. Dat kan er niet zijn, want als het er wel was, dan telden we daar 1 bij op en dat leverde dan weer een groter getal op. Dit komt doordat we hebben geabstraheerd van de mogelijkheid dat we, om wat voor reden dan ook, geen extra eenheden zouden kunnen toevoegen. Kortom, als je echt abstraheert en idealiseert, zit je aan het oneindige vast. Je ontkomt er niet aan: er zijn oneindig veel natuurlijke getallen.

Maar die oneindigheid van de verzameling natuurlijke getallen is niet helemaal onproblematisch. Zo passen wiskundigen bij de studie van oneindige verzamelingen de logica toe. Neem bijvoorbeeld de uitspraak: ‘Alle natuurlijke getallen hebben eigenschap E, of er is ten minste één natuurlijk getal dat die eigenschap niet heeft.’ Dit geldt binnen de klassieke wiskunde als een logische waarheid. L.E.J. Brouwer, de grootste Nederlandse wiskundige van de twintigste eeuw, betoogde dat die logische waarheid niet evident is. Brouwer had gelijk. Maar hij ging nog een stap verder. Hij verwierp, in de woorden van Wallace – die door het grote aantal afkortingen dat hij hanteert erin slaagt de noties extra nadruk te geven – de logische wet LEM *(Law of the Excluded Middle)*. Uiteindelijk zei Brouwer grote stukken van de klassieke wiskunde vaarwel omdat ze volgens hem onjuist waren gefundeerd, in het bijzonder waar het de studie van oneindige verzamelingen betrof. Slechts weinig wiskundigen volgden hem daarin: de klassieke wiskunde is van het oneindige doordrenkt. Hoewel de kritiek van wetenschappers als Brouwer niet volledig is te weerleggen, zijn de klassieke theorieën te mooi, en ook veel te nuttig, om ze op te geven. Want niet alleen wiskundigen doen het met het oneindige, ook statistici, theoretische fysici, economen, aardwetenschappers en vele anderen.

‘NIET ALLEEN WISKUNDIGEN DOEN HET MET HET ONEINDIGE, OOK STATISTICI, THEORETISCHE FYSICI, ECONOMEN, AARDWETENSCHAPPERS EN VELE ANDEREN.’

Behalve in de getaltheorie hebben wiskundigen in de meetkunde met het oneindige te maken. Lijnen zijn in de meetkunde vaak oneindig lang. Ook daar wordt geabstraheerd van de eindigheid. Maar ook daarbuiten houden wiskundigen zich bezig met talloze andere oneindige structuren. Neem weer de natuurlijke getallen 1, 2, 3, 4 etc. Veel van de natuurlijke getallen zijn te schrijven als een product van andere, kleinere getallen. Zo hebben we 150 = 2 . 75 = 2 . 3 . 25 = 2 . 3 . 5 . 5. Met dit ontbindingsproces kun je soms lang doorgaan, maar het stopt ooit een keer. Waar zo’n ontbinding stopt, hebben we het product van priemgetallen. De eerste zes priemgetallen zijn 2, 3, 5, 7, 11, 13. Priemgetallen zijn een soort atomaire, ondeelbare getallen, waaruit alle andere getallen kunnen worden opgebouwd. Als je hun bestaan hebt ontdekt, ligt het voor de hand dat je er een complete lijst van wilt samenstellen – zoiets als een periodiek systeem voor de theorie van de natuurlijke getallen.

Welnu, de oude Grieken hadden al ontdekt dat dit niet kan; er zijn namelijk oneindig veel priemgetallen. Rond 300 voor Christus leverde de Griek Euclides daarvan een fraai bewijs. Dat gaat zo: stel, ik heb een lijst van priemgetallen, 2, 3, 5, 7 tot en met GP. Daarbij is GP even de naam voor het grootste priemgetal uit de lijst. Beschouw het getal N = (2 . 3 . 5 . 7 …… GP) + 1. Dat wil zeggen: het product van alle priemgetallen uit de lijst met ten slotte 1 daarbij opgeteld. Merk nu op dat als we N delen door een getal uit de lijst, we geen gehele uitkomst krijgen. De getallen uit onze lijst zijn dus geen priemfactoren van N. Dat betekent dat er nu maar twee mogelijkheden zijn, die ons beide een nieuw priemgetal opleveren: N is zelf een priemgetal groter dan het grootste uit onze lijst of N bevat priemfactoren die niet in onze lijst staan. Kortom: er is geen grootste priemgetal. De rij priemgetallen is oneindig.

Georg Cantor is de held van het boek van Wallace. Eeuwenlang hadden vele filosofen en wiskundigen moeite met het oneindige. Neem bijvoorbeeld de zogenoemde *paradox van Galilei*. Die luidt als volgt. Enerzijds zijn er veel meer natuurlijke getallen dan kwadraten, want in het rijtje 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 etc. kom je slechts zo nu en dan een kwadraat tegen. Immers: 1 = 1 . 1, 4 = 2 . 2 en 9 = 3 . 3 etc. zijn kwadraten, maar 2, 3, 5, 6, 7, 8 etc. zijn dat niet. Anderzijds zijn er net zoveel natuurlijke getallen als kwadraten, want ieder natuurlijk getal heeft één uniek, eigen kwadraat. Welnu, de verzameling van kwadraten kan niet tegelijk kleiner dan én even groot zijn als de verzameling van natuurlijke getallen: een paradox. Cantor heeft die paradox in de negentiende eeuw opgelost in zijn theorie van de oneindige verzamelingen. Inmiddels is die een heel centraal onderdeel van de moderne wiskunde geworden.

Cantor (en Dedekind) realiseerden zich dat je begrippen als ‘even groot’ en ‘kleiner dan’ niet zomaar kunt toepassen op oneindige verzamelingen. Cantor voerde het begrip ‘gelijkmachtigheid’ van verzamelingen in. In zijn terminologie is de verzameling kwadraten gelijkmachtig met de verzameling natuurlijke getallen. Tegelijkertijd is de verzameling kwadraten een ‘echte deelverzameling’ van de verzameling natuurlijke getallen. Als je het juiste conceptuele apparaat hanteert, verdwijnt de paradox als sneeuw voor de zon. Dedekind realiseerde zich bovendien dat de *paradox van Galilei* in feite de essentie van de oneindigheid karakteriseert: als een verzameling V gelijkmachtig is met een echte deelverzameling van V, dan is die verzameling V noodzakelijk oneindig. Kortom: de zoektocht naar de wiskunde van het oneindige is in belangrijke mate een zoektocht naar de juiste begrippen waarmee we oneindige verzamelingen en hun relaties moeten beschrijven. Wiskundigen abstraheren en idealiseren daarbij. Maar hoe ze dat precies moeten doen, is van tevoren niet altijd meteen duidelijk.

> ‘GEORG CANTOR HAD MENTALE PROBLEMEN EN WERD VERSCHILLENDE MALEN VERPLEEGD IN EEN PSYCHIATRISCHE INRICHTING. MEN HEEFT WEL GESUGGEREERD DAT ZIJN WISKUNDE VAN HET ONEINDIGE EN IN HET BIJZONDER DE PARADOXEN HEM TOT WAANZIN HEBBEN GEDREVEN.’

Wie meer wil weten over Cantors theorie van de oneindige verzamelingen, kan zowel bij de Kaplans als bij Wallace terecht. De Kaplans proberen het kort maar eenvoudig uit te leggen, Wallace laat uitvoerig zien hoe de theorie bij Cantor werd geboren. Hij maakt het de lezer niet gemakkelijk, maar heeft veel te bieden. Ik geef nog enkele voorbeelden van wallaciaanse afkortingen, die het goed doen in het boek. Pythagoras, in de terminologie van Wallace de leider van de DBP *(Divine Brotherhood of the Pythagoreans)*, was wiskundige maar ook sekteleider. Hij heeft de PT *(Pythagorean Theorem)* zeker niet zelf bedacht, want die stelling staat al op Babylonische kleitabletten, die meer dan een millennium ouder zijn. De cantoriaanse notie van een verzameling is informeel en leidt tot paradoxen. Cantor doet NST *(Naive Set Theory)*. Beroemd is de volgende vraag van Bertrand Russell: bevat de verzameling met alle verzamelingen als elementen zichzelf als element? Dit is de zogenaamde *paradox van Russell*, die verdwijnt als we NST axiomatiseren. Dat kan volgens VNB (Von Neumann Bernays), maar ook volgens ZFS (Zermelo Fraenkel Skolem). Cantor had mentale problemen en werd verschillende malen verpleegd in een psychiatrische inrichting. Men heeft wel gesuggereerd dat zijn wiskunde van het oneindige en in het bijzonder de paradoxen hem tot waanzin hebben gedreven. Dat is onzin. Wallace zet het misverstand recht.

Ook de paradoxen van Zeno – door Wallace met ZP aangeduid – spelen door het hele boek een rol. In de vijfde eeuw voor Christus zei deze wijsgeer bijvoorbeeld: ‘Beweging is onmogelijk, want om van A naar B te komen, moet je eerst naar het midden van AB, vervolgens naar het midden van de resterende helft, dan naar het midden van het dan resterende kwart etc. Kortom: je moet oneindig veel dingen doen voordat je überhaupt in B kunt arriveren.’ ZP is een echte paradox; pas in de negentiende eeuw zijn we gaan begrijpen wat er precies aan de hand is. Wallace maakt het allemaal duidelijk. Ik kan zowel *The Art of the Infinite* als *Everything and More* aanbevelen. Maar het is geen geheim dat het laatste boek mijn voorkeur heeft.

Teun Koetsier is historicus van de wiskunde en als universitair docent verbonden aan de Faculteit Exacte Wetenschappen van de Vrije Universiteit.

Besproken boeken:

Everything and More. A Compact History of ∞
door **David Foster Wallace**
W.W. Norton & Company. New York/Londen 2003.
336 pag., € 17,15

The Art of the Infinite. The Pleasures of Mathematics
door **Robert en Ellen Kaplan**
Oxford University Press. Oxford 2003.
324 pag., € 26,30